DS 2

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est composé de parties indépendantes, que vous pouvez traiter dans le désordre.

I. Questions de cours

Répondre aux questions de cours suivantes en une ou deux lignes maximum.

1. Rappeler l'expression de la poussée d'Archimède subie par un objet de volume V dans un fluide de masse volumique ρ_f.
2. Énoncer la troisième loi de Kepler.
3. Énoncer le théorème du moment cinétique (scalaire) appliqué à un solide de moment d'inertie J_Δ en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen.
4. Rappeler la définition du coefficient adiabatique.
5. Rappeler la relation de Mayer pour un gaz parfait.
6. Énoncer la loi de Laplace pour un gaz parfait, et rappeler ses conditions d'applications.
7. Rappeler la définition de la température thermodynamique.
8. Énoncer la troisième identité thermodynamique pour un système fermé de composition constante.
9. Exprimer le titre massique en liquide d'un équilibre liquide-gaz en fonction des volumes massiques à l'aide de la règle des moments.
10. Préciser l'abscisse et l'ordonnée d'un diagramme entropique.

Correction :

1. (*1 pt*) La poussée d'Archimède s'exprime : $\vec{\pi} = -\rho_\text{f} V \vec{g}$.
2. (*1 pt*) La troisième loi de Kepler indique que le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ est constant pour toutes les planètes du système solaire, avec T la période de révolution de la planète autour du Soleil et a le demi-grand axe de sa trajectoire elliptique.
3. (*1 pt*) Le théorème du moment cinétique (scalaire) donne : $\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = J_\Delta\,\dot{\omega} = \sum M_\Delta\left(\vec{F}_\text{ext}\right)$, avec $\sum M_\Delta\left(\vec{F}_\text{ext}\right)$ la somme des moments scalaires des forces extérieures appliquées au solide.
4. (*1 pt*) Le coefficient adiabatique est : $\gamma = \dfrac{C_\text{P}}{C_\text{V}}$.
5. (*1 pt*) La relation de Mayer s'écrit : $C_\text{P} - C_\text{V} = n\,R$.
6. (*2 pts*) La loi de Laplace donne : $P\,V^\gamma = \text{cste}$.
Elle peut s'appliquer lors d'une transformation isentropique, c'est-à-dire adiabatique et réversible.
7. (*1 pt*) La température thermodynamique est : $T = \left.\dfrac{\partial U}{\partial S}\right|_V$.
8. (*1 pt*) La troisième identité thermodynamique est : $\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}P$.
9. (*1 pt*) Le titre massique en liquide s'exprime : $x_\text{L} = \dfrac{v_\text{G} - v}{v_\text{G} - v_\text{L}}$.
10. (*1 pt*) Un diagramme entropique présente l'entropie massique s en abscisse et la température T en ordonnée.

II. Diagramme potentiel-pH de l'azote

Données à 25°C

pK_a des couples acido-basiques :

- $pK_a(HNO_{3(aq)}/NO_{3(aq)}^-) = -1{,}37$;
- $pK_a(HNO_{2(aq)}/NO_{2(aq)}^-) = 3{,}3$;
- $pK_a(NH_{4(aq)}^+/NH_{3(aq)}) = 9{,}2$.

Potentiels standards des couples d'oxydo-réductions :

- $E^\circ(NO_{3(aq)}^-/HNO_{2(aq)}) = 0{,}94\,V$;
- $E^\circ(NO_{3(aq)}^-/NO_{(g)}) = 0{,}96\,V$;
- $E^\circ(HNO_{2(aq)}/NO_{(g)}) = 0{,}99\,V$;
- $E^\circ(Cu_{(aq)}^{2+}/Cu_{(s)}) = 0{,}34\,V$;

Masses molaires :

- du cuivre : $M_{Cu} = 63{,}5\,g\cdot mol^{-1}$;
- du l'azote : $M_N = 14{,}0\,g\cdot mol^{-1}$;
- de l'ion nitrate : $M_{NO_3^-} = 62{,}0\,g\cdot mol^{-1}$.

Constantes diverses :

- $V_m = 22{,}5\,L\cdot mol^{-1}$ le volume molaire d'un gaz ;
- $F = 9{,}65.10^4\,C\cdot mol^{-1}$ la constante de Faraday ;
- $R = 8{,}3\,J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$ la constante des gaz parfaits ;
- $\dfrac{RT}{F}\ln(10) \approx 0{,}060\,V$ à $T = 298\,K$.

On se propose d'étudier le diagramme potentiel-pH simplifié de l'azote en se limitant aux espèces suivantes : ions nitrates $NO_{3(aq)}^-$, acide nitreux $HNO_{2(aq)}$, ions nitrites $NO_{2(aq)}^-$ et monoxyde d'azote $NO_{(g)}$. La ligne frontière qui sépare deux domaines de prédominance ou de stabilité correspondra à une concentration de $1\,mol\cdot L^{-1}$ pour chaque espèce en solution, et pour les gaz, à la pression standard de référence $P^\circ = 1\,bar$.

11. Expliquer pourquoi l'acide nitrique $HNO_{3(aq)}$ n'intervient pas dans le diagramme potentiel-pH.

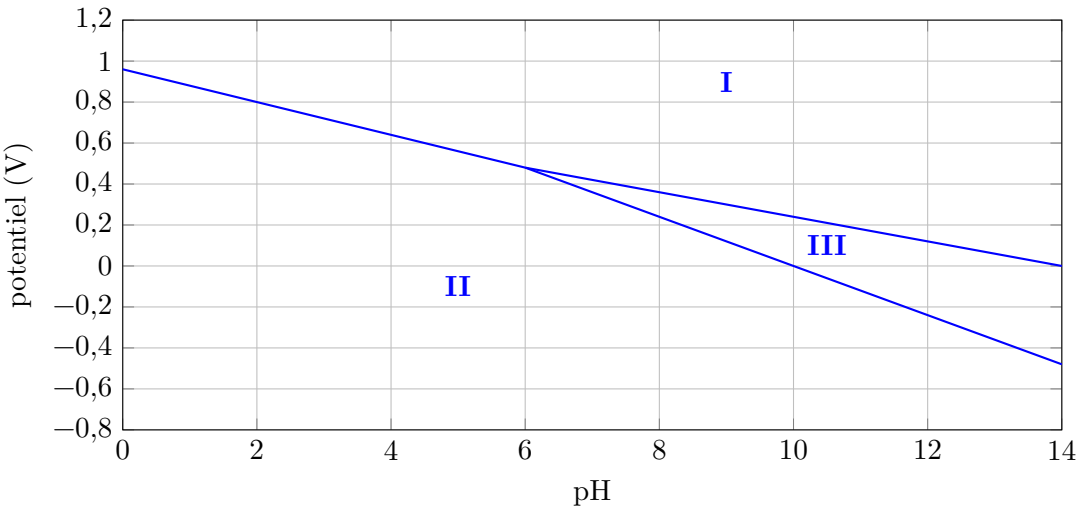
12. Écrire les équations des demi-réactions électroniques associées aux couples $NO_{3(aq)}^-/HNO_{2(aq)}$ et $HNO_{2(aq)}/NO_{(g)}$.

13. Quel type de réaction subit $HNO_{2(aq)}$ en solution ? Écrire l'équation correspondante.

14. Donner les nombres d'oxydation de l'azote pour les quatre espèces azotées considérées.

15. À l'aide d'un diagramme présentant en ordonnée le nombre d'oxydation et en abscisse les valeurs de pH, indiquer les domaines de prédominance ou de stabilité des différentes espèces azotées.

On fournit ci-dessous un diagramme potentiel-pH de l'élément azote.



16. Indiquer la correspondance entre les espèces chimiques $NO_{(g)}$, $NO_{3(aq)}^-$ et $NO_{2(aq)}^-$ et les zones **I**, **II** et **III** du diagramme.

17. Donner l'équation de la ligne frontière séparant les zones **I** et **III** en fonction du pH et du potentiel standard du couple redox considéré.

On plonge une lame de cuivre de masse $m = 12{,}7\,\text{g}$ dans un volume $V = 300\,\text{mL}$ d'une solution d'acide nitrique de concentration $C = 2{,}00\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

18. Écrire l'équation de la réaction qui a lieu en plongeant la lame. On supposera que cette réaction est totale.

19. Calculer la quantité de matière initiale de chaque réactif.

20. En déduire le réactif limitant, et calculer l'avancement final de la réaction.

21. Quelle est la formule chimique du gaz formé ?

22. Calculer le volume de gaz produit au cours de la réaction.

23. Calculer la charge transférée lors de la réaction.

L'ammonitrate est un engrais azoté solide, bon marché, très utilisé dans l'agriculture. Il est vendu par sac de 500 kg et contient du nitrate d'ammonium $NH_4NO_{3(s)}$. Les indications fournies par le fabricant d'engrais sur le sac à la vente stipulent que le pourcentage en masse d'élément azote N est de 34,4%.

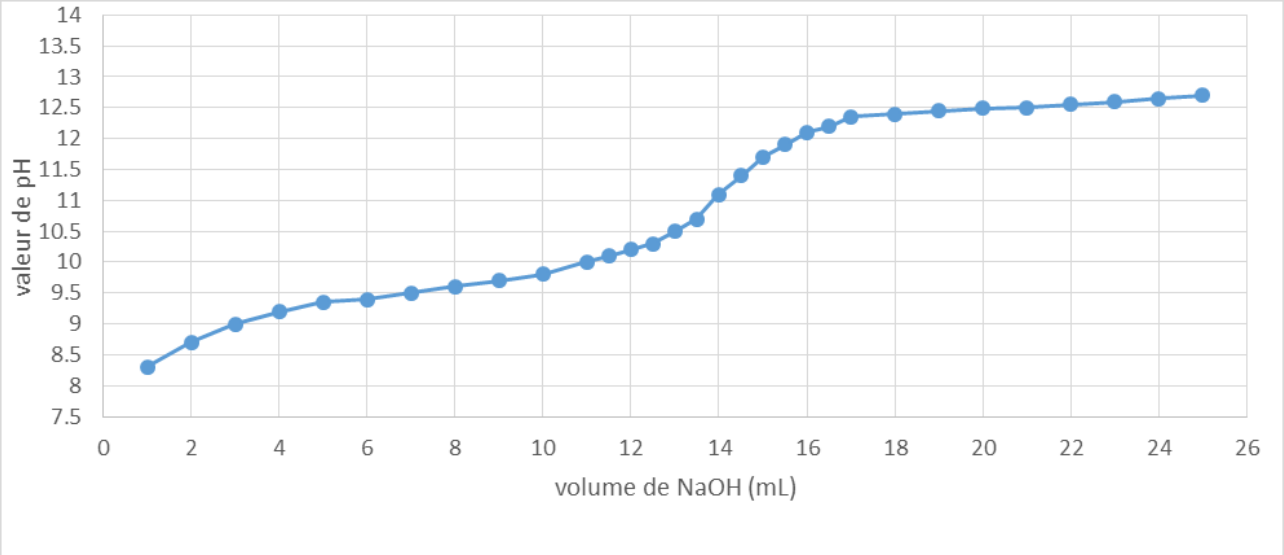
Afin de vérifier l'indication du fabricant, on dissout 6,00 g d'engrais dans une fiole jaugée de volume $V_0 = 250\,\text{mL}$. On introduit un volume $V_1 = 10{,}0\,\text{mL}$ de cette solution dans un bécher, et on dose les ions ammonium $NH^+_{4(aq)}$ présents à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration $C = 0{,}200\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

24. Sachant que le nitrate d'ammonium est très soluble dans l'eau, écrire la réaction de dissolution correspondante.

25. L'ion ammonium $NH^+_{4(aq)}$ est-il un acide ou une base ?

26. Écrire l'équation de la réaction correspondant au titrage.

La figure ci-dessous représente l'évolution du pH de la solution en fonction du volume de NaOH versé.



27. Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'équivalence.

28. Quelles sont toutes les espèces chimiques présentes en solution dans le mélange réactionnel à l'équivalence ?

29. Donner l'expression littérale de la quantité de matière d'ions $NH^+_{4(aq)}$ dans la fiole jaugée en fonction des données de l'énoncé, puis réaliser l'application numérique.

30. En déduire la quantité de nitrate d'ammonium présente dans la fiole jaugée.

31. Calculer la masse d'élément azote N (arrondie au gramme près) présente dans cet échantillon d'engrais. Les indications du fabricant sont-elles correctes ?

Correction :

11. (*1 pt*) L'acide nitrique est un acide fort comme son pK_a est inférieur à 0, il est donc totalement dissocié dans l'eau.

12. (*2 pts*) Les deux demi-équations électroniques sont :

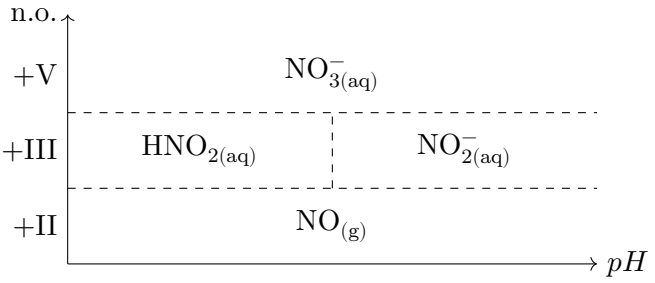
- $NO_{3(aq)}^- + 3\,H_{(aq)}^+ + 2\,e^- = HNO_{2(aq)} + H_2O_{(l)}$;
- $HNO_{2(aq)} + H_{(aq)}^+ + e^- = NO_{(g)} + H_2O_{(l)}$.

13. (*2 pts*) En plaçant les couples $HNO_{2(aq)}/NO_{(g)}$ et $NO_{3(aq)}^-/HNO_{2(aq)}$ sur une échelle de potentiel, la règle du gamma indique que $HNO_{2(aq)}$ subit une réaction de dismutation.
En combinant les deux demi-équations précédentes, on en déduit l'équation de cette réaction de dismutation : $3\,HNO_{2(aq)} = 2\,NO_{(g)} + NO_{3(aq)}^- + H_{(aq)}^+ + H_2O_{(l)}$.

14. (*4 pts*) Les nombres d'oxydation de l'azote sont :

- n.o.(N) = +V dans $NO_{3(aq)}^-$;
- n.o.(N) = +III dans $HNO_{2(aq)}$;
- n.o.(N) = +III dans $NO_{2(aq)}^-$;
- n.o.(N) = +II dans $NO_{(g)}$.

15. (*1 pt*) Comme $HNO_{2(aq)}$ est plus acide que $NO_{2(aq)}^-$, on obtient le diagramme suivant :



16. (*3 pts*) Par identification avec le diagramme précédent, on en déduit que :

- $NO_{3(aq)}^-$ correspond à la zone **I** ;
- $NO_{(g)}$ correspond à la zone **II** ;
- $NO_{2(aq)}^-$ correspond à la zone **III**.

17. (*2 pts*) La frontière concerne le couple $NO_{3(aq)}^-/NO_{2(aq)}^-$, dont la demi-équation est : $NO_{3(aq)}^- + 2\,H_{(aq)}^+ + 2\,e^- = NO_{2(aq)}^- + H_2O_{(l)}$.
L'équation de la ligne frontière est donnée par le potentiel de Nernst : $E = E^\circ(NO_{3(aq)}^-/NO_{2(aq)}^-) + \dfrac{0{,}060}{2}\log\left(\dfrac{[NO_3^-]\,[H^+]^2}{[NO_2^-]}\right) = E^\circ(NO_{3(aq)}^-/NO_{2(aq)}^-) - 0{,}060\,pH$.

18. (*1 pt*) L'acide nitrique $HNO_{3(aq)}$ étant un acide fort, il est totalement dissocié dans l'eau selon la réaction : $HNO_{3(aq)} = NO_{3(aq)}^- + H_{(aq)}^+$. En plaçant les couples $NO_{3(aq)}^-/NO_{(g)}$ et $Cu_{(aq)}^{2+}/Cu_{(s)}$ sur une échelle de potentiel, la règle du gamma indique que les ions nitrates $NO_{3(aq)}^-$ réagissent alors avec le cuivre solide $Cu_{(s)}$. En milieu acide, les demi-équations sont : $NO_{3(aq)}^- + 4\,H_{(aq)}^+ + 3\,e^- = NO_{(g)} + 2\,H_2O_{(l)}$ et $Cu_{(s)} = Cu_{(aq)}^{2+} + 2\,e^-$, d'où l'équation de la réaction : $3\,Cu_{(s)} + 2\,NO_{3(aq)}^- + 8\,H_{(aq)}^+ = 3\,Cu_{(aq)}^{2+} + 2\,NO_{(g)} + 4\,H_2O_{(l)}$.

19. (*3 pts*) Les quantités de matières initiales sont :

- $n_{Cu,i} = \dfrac{m}{M_{Cu}} = 0{,}200\,\text{mol}$;
- $n_{NO_3^-,i} = C\,V = 0{,}600\,\text{mol}$;
- $n_{H^+,i} = C\,V = 0{,}600\,\text{mol}$.

20. (*2 pts*) On réalise un tableau d'avancement :

	$3\,Cu_{(s)}$	+	$2\,NO_{3(aq)}^-$	+	$8\,H_{(aq)}^+$	=	$3\,Cu_{(aq)}^{2+}$	+	$2\,NO_{(g)}$	+	$4\,H_2O_{(l)}$
$t = 0$	$n_{Cu,i}$		$n_{NO_3^-,i}$		$n_{H^+,i}$		0		0		excès
t_f	$n_{Cu,i} - 3\,\xi_f$		$n_{NO_3^-,i} - 2\,\xi_f$		$n_{H^+,i} - 8\,\xi_f$		$3\,\xi_f$		$2\,\xi_f$		excès

On en déduit que le réactif limitant est $Cu_{(s)}$.

L'avancement final de la réaction est donc : $\xi_f = \dfrac{n_{Cu,i}}{3} = 6{,}67.10^{-2}\,\text{mol}$.

21. (*1 pt*) Le gaz formé est $NO_{(g)}$.

22. (*1 pt*) Le volume de gaz produit est : $V_{NO,f} = n_{NO,f}\,V_m = 2\,\xi_f\,V_m = 3{,}00\,\text{L}$.

23. (*1 pt*) La quantité d'électrons échangés lors de la réaction est : $n_{e^-} = 6\,\xi_f$, d'où une charge transférée : $Q = n_{e^-}\,F = 6\,\xi_f\,F = 3{,}86.10^4\,\text{C}$.

24. (*1 pt*) La réaction de dissolution est : $NH_4NO_{3(s)} = NH_{4(aq)}^+ + NO_{3(aq)}^-$.

25. (*1 pt*) L'ion ammonium $NH_{4(aq)}^+$ est un acide.

26. (*1 pt*) L'équation de la réaction de titrage est : $NH_{4(aq)}^+ + HO_{(aq)}^- = NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)}$.

27. (*2 pts*) L'équivalence a lieu au niveau du saut de pH, c'est-à-dire pour un volume versé $V_{éq} \approx 14\,\text{mL}$, qui correspond à $pH \approx 11$.

28. (*2 pts*) Les réactifs ont été introduits en proportions stœchiométriques à l'équivalence, le mélange réactionnel ne contient donc que les produits $NH_{3(aq)}$ et $H_2O_{(l)}$, ainsi que les ions $Na_{(aq)}^+$ et $NO_{3(aq)}^-$ qui sont spectateurs.

29. (*2 pts*) On réalise un tableau d'avancement :

	$NH_{4(aq)}^+$	+	$HO_{(aq)}^-$	=	$NH_{3(aq)}$	+	$H_2O_{(l)}$
$t = 0$	$n_{NH_4^+,\text{bécher}}$		$C\,V_{éq}$		0		excès
$t_{éq}$	$n_{NH_4^+,\text{bécher}} - \xi_{éq}$		$C\,V_{éq} - \xi_{éq}$		$\xi_{éq}$		excès

Les réactifs étant introduits dans des proportions stœchiométriques à l'équivalence, on obtient : $\xi_{éq} = n_{NH_4^+,\text{bécher}} = C\,V_{éq}$. La quantité d'ions ammonium $NH_{4(aq)}^+$ dans la fiole jaugée est alors : $n_{NH_4^+,\text{fiole}} = \dfrac{n_{NH_4^+,\text{bécher}}\,V_0}{V_1} = \dfrac{C\,V_{éq}\,V_0}{V_1}$.

On obtient : $n_{NH_4^+,\text{fiole}} = 7{,}0.10^{-2}\,\text{mol}$.

30. (*1 pt*) Comme 1 mol de nitrate d'ammonium $NH_4NO_{3(s)}$ donne 1 mol d'ions ammonium $NH_{4(aq)}^+$ en solution, la quantité de nitrate d'ammonium dans la fiole jaugée est : $n_{NH_4NO_3} = n_{NH_4^+,\text{fiole}} = 7{,}0.10^{-2}\,\text{mol}$.

31. (*2 pts*) Cet échantillon d'engrais contient une quantité d'élément azote : $n_N = 2\,n_{NH_4NO_3}$, soit une masse : $m_N = n_N\,M_N = 2\,n_{NH_4NO_3}\,M_N \approx 2\,\text{g}$.

Le pourcentage en masse d'élément azote est donc d'environ 33%, ce qui valide les indications du fabricant aux incertitudes de mesure près.

III. La Terre, unique planète du système solaire à abriter la vie

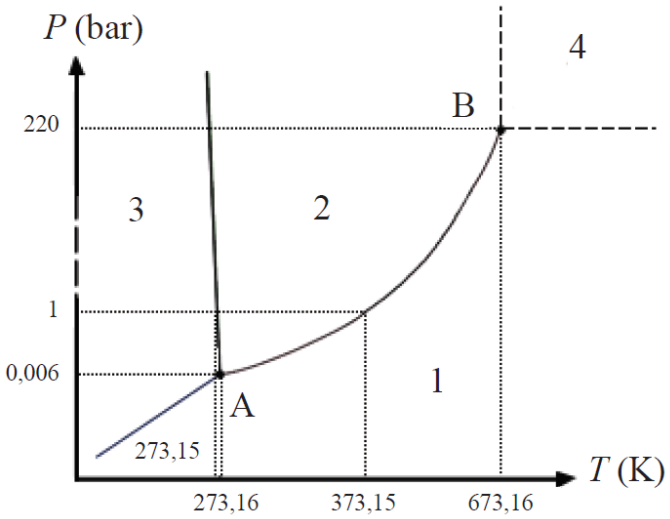
La présence d'eau liquide et d'une atmosphère, permettant le processus de la photosynthèse, ainsi que l'existence d'un champ magnétique, servant de bouclier aux rayonnements cosmiques, sont nécessaires à l'apparition de la vie. Le tableau ci-dessous réunit quelques caractéristiques de planètes du Système Solaire :

Planètes	**Distance au Soleil**	**Température en surface**	**Pression atmosphérique**	**Composition de leur atmosphère**
Mercure	0,30 à 0,47 UA	-170°C à 430°C	10^{-9} Pa	Quasiment sans atmosphère
Vénus	0,72 UA	470°C	9.10^6 Pa	Principalement du dioxyde de carbone
Terre	1 UA	-93°C à 57°C	1.10^5 Pa	80% de diazote et 20% de dioxygène
Mars	1,4 à 1,7 UA	-100°C à 0°C	600 Pa	Principalement du dioxyde de carbone

On rappelle que $1\,\text{UA} = 1{,}5.10^{11}\,\text{m}$, ce qui correspond à la distance Terre-Soleil.

III.1. La présence d'eau liquide

On donne ci-dessous le diagramme (P, T) de l'eau :



32. Associer à chaque domaine (1, 2, 3 et 4) l'état physique dans lequel l'eau se trouve.

33. Donner les noms des points A et B.

Si l'eau n'existe plus sous forme liquide aujourd'hui sur Mars, elle a dû être néanmoins présente sous cette forme dans le passé. Les volcans martiens ont dû éjecter de l'hydrogène et de l'oxygène qui ont donné naissance à de l'eau dont les canaux conservent la trace de son écoulement. Lors du refroidissement ultérieur de la planète, l'eau a dû disparaitre sous forme de glace dans le sol. Un élément qui vient confirmer cette hypothèse est la présence de dépôts de sel au creux de dépressions vers lesquelles serpentent des canaux.

34. D'après le texte, sous quel état physique se trouve essentiellement l'eau sur Mars aujourd'hui ?

35. Valider cette hypothèse en vous aidant du tableau et du diagramme (P, T) de l'eau.

III.2. L'influence de la concentration en dioxyde de carbone

Conventionnellement, l'atmosphère d'une planète est divisée en plusieurs couches. On s'intéresse à un modèle simplifié de la couche la plus basse appelée troposphère : le gaz contenu dans la troposphère d'une planète est assimilé à un gaz parfait et on suppose que la température de la troposphère est uniforme et égale à T_0.

On note n la quantité de matière de gaz contenu dans la troposphère, V le volume de gaz contenu dans la troposphère et M la masse molaire de ce même gaz. Pour repérer l'altitude, on place un axe (Oz) vertical dirigé vers le haut dont l'origine est située à la surface du sol. On définit la pression $P(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ du gaz de la troposphère à l'altitude z. On suppose enfin que l'intensité de la pesanteur g ne varie pas avec l'altitude dans la troposphère.

36. Rappeler la loi des gaz parfaits, en précisant l'unité de chaque grandeur physique.

37. En déduire une expression de la masse volumique $\rho(z)$ du gaz de la troposphère en fonction de la pression $P(z)$ du gaz, de la constante des gaz parfaits R, de la température T_0 et de la masse molaire M.

On suppose que chaque couche de la troposphère est en équilibre statique dans le référentiel galiléen du sol.

38. Rappeler la relation de la statique des fluides.

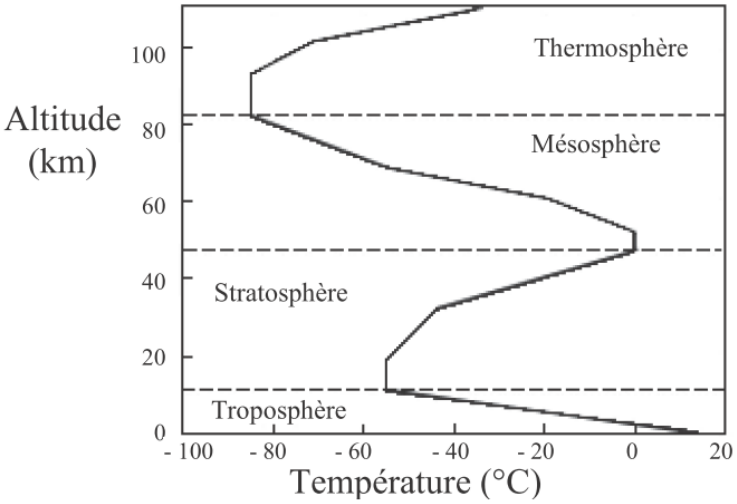
39. Montrer que la pression $P(z)$ dans la troposphère peut alors s'exprimer :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

avec P_0 la pression à l'altitude $z = 0$, et H une constante à exprimer en fonction de R, T_0, M et g.

40. Quelle est la dimension de H ? Que représente physiquement cette grandeur ?

On donne le profil de température de l'atmosphère terrestre :



41. À l'aide de cette figure, justifier que le modèle simplifié de la troposphère adopté précédemment est incorrect.

42. Quel autre modèle, relatif à la température, aurait-on pu employer ?

43. À l'aide du tableau donné au début de cette partie, comparer la distance par rapport au Soleil des planètes Mercure et Vénus, ainsi que leur température moyenne en surface.

44. En déduire l'influence de la concentration en dioxyde de carbone dans l'atmosphère d'une planète sur sa température ? Comment se nomme cet effet ?

III.3. Estimation de la masse de l'atmosphère

45. À partir des résultats du modèle de l'atmosphère isotherme, montrer que la masse volumique peut s'écrire :

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

avec ρ_0 la masse volumique à l'altitude $z = 0$ que l'on exprimera en fonction des données de l'énoncé.

46. En réalisant une intégration, donner l'expression de la masse d'une colonne d'air de section S comprise entre les altitudes $z = 0$ et $z = +\infty$.

47. En déduire l'expression de la masse totale de l'atmosphère d'une planète, en fonction du rayon R_p de la planète, de la pression P_0 à sa surface et de l'intensité de la gravité g.

On peut considérer que le rayon de Vénus et l'intensité de la pesanteur à sa surface sont à peu près égaux à ceux de la Terre.

48. Montrer que l'atmosphère de Vénus est environ 100 fois plus lourde que celle de la Terre.

Correction :

32. (*4 pts*) On associe chaque domaine à un état physique :
- 1 – gaz ;
- 2 – liquide ;
- 3 – solide ;
- 4 – fluide supercritique.

33. (*2 pts*) **A** est le point triple.
B est le point critique.

34. (*1 pt*) L'eau se trouve sous forme solide aujourd'hui sur Mars.

35. (*1 pt*) La température à la surface de Mars est comprise entre -100°C et 0°C, soit 173 K et 273 K, et la pression atmosphérique est de 600 Pa, soit 0,006 bar, ce qui correspond bien au domaine solide de l'eau d'après le diagramme (P, T).

36. (*2 pts*) La loi des gaz parfaits s'écrit : $P\,V = n\,R\,T$, avec :
- P qui s'exprime en Pa ;
- V qui s'exprime en m^3 ;

- n qui s'exprime en mol ;
- T qui s'exprime K.

37. (*1 pt*) La masse volumique du gaz peut s'exprimer : $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{n\,M}{V} = \dfrac{P(z)\,M}{R\,T_0}$.

38. (*1 pt*) La relation de la statique des fluides est : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \rho\,\vec{g}$.

39. (*2 pts*) La projection de la relation de la statique des fluides sur l'axe (Oz) donne : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)\,g = -\dfrac{P(z)\,M}{R\,T_0}\,g = -\dfrac{P(z)}{H}$, en posant $H = \dfrac{R\,T_0}{M\,g}$, et la solution de cette équation différentielle s'exprime sous la forme : $P(z) = A\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)$.

Comme $P(z=0) = P_0 = A$, on en déduit : $P(z) = P_0\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)$.

40. (*2 pts*) H est une longueur.

Elle représente la distance caractéristique sur laquelle la pression décroit, c'est-à-dire une estimation de l'épaisseur de la troposphère.

41. (*1 pt*) On voit sur la figure que la troposphère n'est pas isotherme, il n'est donc pas possible de réaliser cette hypothèse.

42. (*1 pt*) Pour être en accord avec la figure, on pourrait utiliser un modèle où la température décroit de façon affine avec l'altitude : $T(z) = T_0 - k\,z$, avec k une constante.

43. (*1 pt*) Vénus est plus éloigné du Soleil que Mercure, et pourtant la température à sa surface est plus élevée.

44. (*2 pts*) On en déduit qu'une augmentation de la concentration en dioxyde de carbone dans l'atmosphère d'une planète augmente sa température en surface.

Il s'agit de l'effet de serre.

45. (*1 pt*) La masse volumique peut s'exprimer : $\rho(z) = \dfrac{P(z)\,M}{R\,T_0} = \dfrac{P_0\,M}{R\,T_0}\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right) = \rho_0\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)$,

d'où : $\rho_0 = \dfrac{P_0\,M}{R\,T_0}$.

46. (*2 pts*) Une tranche de la colonne d'air comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ a une masse : $\mathrm{d}m = \rho(z)\,S\,\mathrm{d}z$.

On intègre cette masse élémentaire entre les altitudes $z = 0$ et $z = +\infty$ pour obtenir la masse totale de la colonne d'air : $m = \displaystyle\int_{z=0}^{+\infty}\mathrm{d}m = \int_{z=0}^{+\infty}\rho(z)\,S\,\mathrm{d}z = \rho_0\,S\int_{z=0}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)\mathrm{d}z = \rho_0\,S\left[-H\,\exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)\right]_{z=0}^{+\infty} = \rho_0\,S\,H$.

47. (*1 pt*) La masse de l'atmosphère d'une planète est : $m_{\text{atm}} = \rho_0\,4\,\pi\,R_{\text{p}}^2\,H = \dfrac{P_0\,M}{R\,T_0}\,4\,\pi\,R_{\text{p}}^2\,\dfrac{R\,T_0}{M\,g} = \dfrac{4\,\pi\,R_{\text{p}}^2\,P_0}{g}$.

48. (*1 pt*) On calcule le rapport $\dfrac{m_{\text{atm,Vénus}}}{m_{\text{atm,Terre}}} \approx \dfrac{P_{0,\text{Vénus}}}{P_{0,\text{Terre}}} \approx 100$, l'atmosphère de Vénus est environ 100 fois plus lourde que celle de la Terre.

IV. Atterrissage de Perseverance

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. Le site d'atterrissage, le cratère Jezero, est une zone présentant une grande diversité géologique et ayant abrité un lac il y a environ 3,6 milliards d'années. Un des enjeux de cette mission est le prélèvement d'échantillons destinés à être analysés sur Terre afin de déceler d'éventuelles traces d'une vie passée.

La sonde spatiale Mars 2020, de masse $m = 3{,}0.10^3\,\text{kg}$, pénètre dans l'atmosphère martienne à la vitesse de $12\,000\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ (vitesse mesurée par rapport au sol), elle larguera le rover 7 minutes plus tard. Après une première phase de freinage grâce au bouclier thermique, le parachute est déployé au point A à l'altitude $h_A = 10{,}5\,\text{km}$ et à la vitesse $v_A = 400\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Au bout de 20 secondes, la vitesse au point B n'est plus que de $v_B = 200\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et l'altitude de $h_B = 7{,}5\,\text{km}$, Mars 2020 largue alors son bouclier thermique. Nous

considérerons dans cette étude que la sonde réalise un mouvement de translation purement vertical.

49. En considérant que la masse de la sonde est constante, exprimer la variation d'énergie cinétique entre les points A et B, puis réaliser l'application numérique.

50. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

51. En supposant l'accélération de la pesanteur martienne uniforme et de valeur $g = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, calculer la valeur du travail du poids entre les points A et B, noté $W_{AB}(\vec{P})$.

52. Ce travail est-il qualifié de moteur ou de résistant ? Justifier votre réponse.

53. À partir des questions précédentes, calculer la valeur du travail de la force de frottement sur le parachute entre les points A et B, noté $W_{AB}(\vec{f})$.

54. En supposant cette force de frottement $\vec{f}$ constante, en déduire sa valeur.

En réalité, la force de frottement n'est pas constante et dépend de la vitesse du système. Nous considérerons une force de type frottement fluide $\vec{f} = -h\,\vec{v}$, où h est le coefficient de frottement fluide et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du système. On note (Oz) un axe vertical et orienté vers le bas.

55. La descente de la sonde peut-elle être qualifiée de chute libre ? Justifier votre réponse.

56. À partir de la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par la projection de la vitesse v de la sonde sur l'axe (Oz), puis la mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + A\,v = B$$

où A et B représentent deux constantes dont on précisera les expressions.

57. Sans résoudre l'équation, déduire de la question précédente l'expression de la vitesse limite pouvant être atteinte par la sonde, au bout d'un temps infiniment long.

Pour pouvoir réussir cette phase périlleuse, l'étage de descente (le skycrane) dispose d'un radar Doppler comportant six antennes dévoilées dès que le bouclier thermique est largué. Le radar peut alors déterminer avec précision la vitesse et l'altitude de la sonde. La bande Ka (Kurz Above) du spectre électromagnétique est très utilisée dans le domaine des télécommunications spatiales : on considère une fréquence $\nu = 30\,\mathrm{GHz}$. On rappelle que la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est $c_0 = 3{,}0.10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

58. Calculer la longueur d'onde dans le vide, notée λ_0, associée à cette fréquence.

Lorsque la sonde se trouve à une altitude H, celle-ci peut être déterminée avec précision grâce à la durée mise par l'onde pour effectuer un aller-retour entre l'antenne d'émission et le sol.

59. Exprimer l'altitude H de la sonde en fonction de la durée Δt mise par l'onde pour effectuer cet aller-retour.

60. Estimer le temps Δt écoulé entre l'émission de l'onde par le radar au point B correspondant à la séparation du bouclier thermique, et sa réception après réflexion sur le sol martien.

Correction :

49. (*2 pts*) La variation d'énergie cinétique s'exprime : $\Delta E_\mathrm{c} = E_{\mathrm{c},B} - E_{\mathrm{c},A} = \dfrac{1}{2}\,m\,(v_B^2 - v_A^2)$.

On obtient : $\Delta E_\mathrm{c} = -1{,}8.10^8\,\mathrm{J}$.

50. (*1 pt*) Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\Delta E_\mathrm{c} = \sum W(\vec{F}_\mathrm{ext})$, avec $\sum W(\vec{F}_\mathrm{ext})$ la somme des travaux des forces extérieures.

51. (*1 pt*) Le travail du poids entre les points A et B est : $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = m\,g\,(h_A - h_B) = 3{,}6.10^7\,\mathrm{J}$.

52. (*1 pt*) Ce travail est qualifié de moteur car il est positif.

53. (*1 pt*) En considérant que le système n'est soumis qu'à son poids et aux forces de frottement au cours de sa chute, l'application du théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B donne : $\Delta E_\mathrm{c} = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{f})$, d'où : $W_{AB}(\vec{f}) = \Delta E_\mathrm{c} - W_{AB}(\vec{P}) = -2{,}2.10^8\,\mathrm{J}$.

54. (*1 pt*) Le travail d'une force de frottement constante entre les points A et B peut s'exprimer : $W_{AB}(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\overrightarrow{AB} = -f\,(h_A - h_B)$, d'où : $f = -\dfrac{W_{AB}(\vec{f})}{h_A - h_B} = 7{,}2.10^4\,\mathrm{N}$.

55. (*1 pt*) La descente de la sonde ne peut pas être qualifiée de chute libre à cause des frottements.

56. (*2 pts*) L'application du PFD à la sonde donne : $m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$, soit en projetant selon l'axe (Oz) : $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - h\,v$, d'où l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{h}{m}\,v = g$, et on en déduit par identification :

$A = \dfrac{h}{m}$ et $B = g$.

57. (*1 pt*) Comme la vitesse tend vers une constante, l'équation différentielle donne : $\dfrac{h}{m}\, v_{\text{lim}} = g$, d'où : $v_{\text{lim}} = \dfrac{m\, g}{h}$.

58. (*1 pt*) La longueur d'onde dans le vide est : $\lambda_0 = \dfrac{c_0}{\nu} = 1{,}0.10^{-2}\,\text{m}$.

59. (*1 pt*) L'onde parcourt une distance $2\,H$ en une durée $\Delta t = \dfrac{2\,H}{c_0}$ pour cet aller-retour, d'où : $H = \dfrac{c_0\,\Delta t}{2}$.

60. (*1 pt*) On obtient : $\Delta t = \dfrac{2\,h_B}{c_0} = 5{,}0.10^{-5}\,\text{s}$.